O LINEÁRNEJ KOMBINÁCII

Marián TRENKLER

Zo základnej školy vieme, že ak máme danú sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi x a y

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{2}$$

riešime ju tak, že prvú rovnicu vynásobime číslom α a druhú číslom β tak, aby sme dostali tretiu rovnicu, a vieme, že riešenie sústavy rovníc (1) a (2) je to isté, ako riešenie sústavy rovníc (1) a (3).

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \tag{3}$$

Rovnica (3) je *lineárnou kombináciou* rovníc (1) a (2). Parametre α a β volíme tak, aby lineárna kombinácia daných rovníc neobsahovala jednu z neznámych. Rovnakým postupom dostaneme rovnice $x = k_1$ a $y = k_2$ a tieto čísla sú riešením danej sústavy.

Pozrime sa na riešenie danej sústavy rovníc z pozície geometrie. Množina všetkých bodov roviny, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu (1), resp. (2), je priamka. Daná sústava rovníc má jedno riešenie práve vtedy, ak tieto priamky sú rôznobežné. Nutnou aj postačujúcou podmienkou preto je to, aby nenulová dvojica čísel (a_1, b_1) nebola násobkom dvojice (a_2, b_2). Graficky riešiť danú lineárnu sústavu rovníc (1) a (2) znamená zostrojiť priamky, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami a prechádzajú ich spoločným bodom, t.j. musíme nahradiť dané priamky priamkami s rovnicami

$$1x + 0y - k_1 = 0 \qquad 0x + 1y - k_2 = 0$$

Pri riešení sústavy lineárnych rovníc v podstatnej miere využívame nasledujúcu vetu:

Veta. *Priamka* **p** *prechádza spoločným bodom priamok daných rovnicami* (1) a (2) *práve vtedy, ak sa jej rovnica dá napísať v tvare (3).*

Dôkaz. Ak bod $M[m, n]$ je bodom priamky (1), tak platí $(a_1m + b_1n + c_1) = 0$ a teda aj $\alpha(a_1m + b_1n + c_1) = 0$, pre všetky reálne čísla α. Podobne, ak bod $M[m, n]$ je bodom druhej priamky platí $\beta(a_2m + b_2n + c_2) = 0$, pre všetky hodnoty parametra β a teda súradnice spoločného bodu daných priamok spĺňajú aj rovnicu (3).

Predpokladajme, že máme danú priamku **p**, ktorá prechádza spoločným bodom daných priamok (1) a (2) a nejakým bodom $Q[q, r]$, ktorý je rôzny od ich spoločného bodu. Stačí položiť v rovnici (3)

$$\alpha = (a_2q + b_2r + c_2), \qquad \beta = -(a_1q + b_1r + c_1)$$

a dostaneme rovnicu danej priamky $\mathbf{p}$.

Doposiaľ sme sa zaoberali len lineárnou kombináciou lineárnych rovníc. Prečo by sme nemohli robiť podobnú lineárnu kombináciu nelineárnych rovníc? Nie je komplikované sformulovať a dokázať vety, ktoré sú analogické aj pre lineárnu kombináciu nelineárnych rovníc.

Na niekoľkých príkladoch ukážeme užitočnosť takýchto úvah.

Najskôr však trochu teórie o kružniciach. Majme dané dve kružnice rovnicami

$$(x-m_1)^2+(y-n_1)^2-r_1^2=0 \tag{4}$$

$$(x-m_2)^2+(y-n_2)^2-r_2^2=0 \tag{5}$$

ktoré sa pretínajú v práve dvoch bodoch. Ak vynásobime prvú rovnicu číslom α a druhú číslom β dostaneme rovnicu

$$\alpha[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2-r_1^2]+\beta[(x-m_2)^2+(y-n_2)^2-r_2^2]=0 \tag{6}$$

Čo môžeme povedať o množine všetkých bodov, ktorých súradnice spĺňajú (6)?

Ak $\alpha+\beta=0$, tak rovnica (6) je rovnicou priamky, ktorá prechádza ich spoločnými bodmi. Táto priamka sa nazýva *chordála* daných kružníc. (Chordála je množinou všetkých bodov, ktoré majú k daným kružniciam rovnakú mocnosť. Pozri [3] str. 134, 144.)

Ak $\alpha+\beta\neq 0$, tak delením rovnice (6) číslom $\alpha+\beta$ dostávame rovnicu typu

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Úpravou na úplné štvorce zistime, že toto je rovnicou kružnice, bodu alebo prázdnej množiny podľa toho, či výraz $\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$ väčši, rovný alebo menší ako 0. Pretože predpokladáme, že kružnice (4) a (5) majú práve dva spoločné body, súradnice týchto bodov spĺňajú (6). Analogicky, ako v prípade lineárnych rovníc platí, že (6) je rovnicou kružnice, ktorá prechádza ich spoločnými bodmi. (Existencia spoločných bodov nám zabezpečuje, že lineárna kombinácia daných rovníc nie je jednoprvkovou ani prázdnou množinou.)

Môžeme niečo podobné povedať o rovnici (6), ak dané kružnice nemajú spoločné body? O tom sa môžete viac dozvedieť v práci [1].

Príklad 1. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $M[1,-1]$ a spoločnými bodmi kružníc $(x-1)^2+(y+2)^2-1=0$ a $(x-3)^2+(y-2)^2-4=0$.

Riešenie: Hľadaná kružnica bude mať rovnicu tvaru

$$\alpha[(x-1^2+(y+2)^2-1]+\beta[(x-3)^2+(y-2)^2-4]=0$$

úpravou

$$(\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)y^2+(-2\alpha-6\beta)x+(\alpha-2\beta)y-4\alpha-2\beta=0$$

Keď do tejto rovnice dosadíme súradnice bodu M postupne dostaneme

$$-8\alpha-4\beta=0$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{1}{2}$$

Ak položíme $\alpha=-1$, tak $\beta=2$ a hľadaná kružnica má rovnicu

$$(x-5)^2+(y-4)^2=41$$

Príklad 2. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x-1)^2+y^2-1=0$ a $(x-3)^2+(y-2)^2-4=0$ a dotýka sa priamky $x=0$.

Riešenie: Ak do rovnice

$$(\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)y^2-(2\alpha+6\beta)x-4\beta y=0$$

dosadíme $x=0$ a ak platí $\alpha+\beta\neq 0$, dostávame kvadratickú rovnicu

$$(\alpha+\beta)y^2-4\beta y+9\beta=0$$

riešením ktorej sú y-ové súradnice spoločných bodov hľadanej kružnice a danej priamky. Pretože chceme, aby sa priamka $x=0$ bola dotyčnicou hľadanej kružnice, položíme jej diskriminant

$$\mathbf{D}=(-4\beta)^2-4(\alpha+\beta)(9\beta)=0$$

úpravou

$$\beta(9\alpha+5\beta)=0.$$

Ak si zvolíme $\alpha=1,\ \beta=0$, resp. $\alpha=-5,\ \beta=9$, tak hľadané kružnice majú rovnice

$$(x-1)^2+y^2=1,\quad (x-\tfrac{11}{2})^2+(y-\tfrac{9}{2})^2=\tfrac{121}{4}$$

Zatiaľ sme sa zaoberali lineárnou kombináciou rovníc kružníc, ale môžeme uvažovať aj o iných krivkách. Ak máme dané dve krivky druhého stupňa alebo dve krivky prvého a druhého stupňa, tak ich lineárna kombinácia má tvar

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Typ krivky v podstatnej miere závisí od koeficientov A,B,C. Ak vieme, aké budú tieto koeficienty v lineárnej kombinácii, tak to môžeme vhodne využiť. Demonštrujme to na nasledujúcom príklade.

Príklad 3. (Viď [2]) Dokážte, že keď sa dve paraboly pretínajú vo štyroch bodoch a ich osi sú navzájom kolmé, potom všetky spoločné body ležia na jednej kružnici.

Stačí však, ak si zvolíme súradnicový systém tak, že osi parabol budú súradnicovými osami a v takto zvolenom systéme uvažované paraboly budú mať rovnice

$$y^2=2p(x-m),\quad x^2=2q(y-n)$$

Ak tieto dve rovnice sčítame dostaneme rovnicu kružnice, na ktorej musia ležať všetky spoločné body daných parabol.

Podobné úvahy s lineárnou kombináciou dvoch rovníc môžeme robiť aj v trojrozmernom priestore. Iste nebudete mať problémy s riešením nasledujúcich úloh:

Úloha 1. Napíšte rovnicu roviny, v ktorej ležia všetky spoločné body guľových plôch daných rovnicami $(x+2)^2+y^2+z^2=25, \quad (x+2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25.$

Úloha 2. Určte stred a polomer kružnice, ktorá je prienikom dvoch guľových plôch zadaných v predchádzajúcej úlohe.

Úloha 3. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza počiatkom súradnicového systému a kružnicou $x^2+y^2+z^2=16, \quad 3x-2y+6z-8=0.$

(Uvedomte si, že kružnica v priestore nemôže byť vyjadrená jednou rovnicou.

V tomto príspevku sme chceli na niekoľkých úlohach ukázať na to, že použitím lineárnej kombinácie môžeme vyriešiť mnohé úlohy, ktoré často považujeme ťažko riešiteľné. Pozorný čitateľ si iste dokáže sformulovať aj mnoho iných úloh, pri riešení ktorých s úspechom využije naznačené postupy.

Literatúra:

1. Z.Medveďová, M.Trenkler, J.Vašková, *Použitie zväzkov kružníc pre riešenie niektorých úloh*, Rozhledy mat-fyzikální **4** (1992), 145–150.
2. M.Trenkler, *O jednej dôkazovej úlohe*, Rozhledy mat-fyzikální **66** (1987-88), 183.
3. J.Vyšín a kolektív, *Geometria pre pedagogické fakulty II*, SPN Bratislava, 1970.

Vyšlo v MIF (Matematika, informatika, fyzika) číslo 9 (január 1996), str.6-9. (Občasník odborno-metodických materiálov pre učiteľov matematiky, fyziky a informatiky stredných škôl.) Metodické centrum v Prešove,

Univerzita P.J.Šafárika, Jesenná 5, 041 54 Košice, Slovensko
E-mail address: trenkler@science.upjs.sk, *Home-page:* kosice.upjs.sk/~trenkler